

УДК 004.942:338.27:504.062

ПРЕИМУЩЕСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ В ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

А.В. Затонский

Березниковский филиал Пермского национального исследовательского политехнического университета

E-mail: zxenon@narod.ru

Показано, что использование эколого-экономических моделей в форме обыкновенных дифференциальных уравнений в задачах прогнозирования развития управляемых систем, предпочтительнее, чем полиномиальных моделей и временных трендов, в смысле адекватности и уменьшения возможного разброса прогнозов, необходимых для принятия решений.

Ключевые слова:

Принятие решений, эколого-экономическая модель, обыкновенные дифференциальные уравнения.

Key words:

Decision support, ecological-economic model, ordinary differential equation.

В практике экологического, социального и экономического моделирования часто используются модели динамики вида

$$y(\vec{x}(t), \vec{z}(t), t) = a_0 + \sum_i a_i x_i(t) + \sum_k b_k z_k(t),$$

где $\vec{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots\}$ – вектор факторов, $\vec{z}(t) = \{z_1(t), z_2(t), \dots\}$ – вектор возмущений, $y(\cdot)$ – реакция исследуемого объекта;

$$\text{или } y(\vec{x}(t), \vec{z}(t), t) = a_0 + \prod_i a_i x_i(t) + \prod_j b_j z_j(t),$$

либо, для функций одного аргумента –

$$y(x(t), z(t), t) = a_0 + \sum_i a_i x(t)^i + \sum_k b_k z(t)^k,$$

либо модели временных рядов в форме $y(t) = \sum_{i=0}^l a_i t^i$.

Поиск в Интернет позволяет обнаружить авторефераты, в которых используются подобные модели: [1. С. 29], [2. С. 27] [3. С. 10 и 16] и т. п. Назначение моделей, обычно – исследование истории и, на ее основании, прогнозирование свойств объекта в зависимости от принятых решений $\vec{x}(t)$.

Такие модели можно упрощенно понять, например, так: если вкладывать в предприятия (отрасль) инвестиции по графику $x_i(t)$, то на выходе получим чистый дисконтированный доход (или другой показатель экономической эффективности) $y(x_i(t), z_i(t))$ с учетом спроса на продукцию (возмущающего воздействия) $z_i(t)$. Дальше обычно речь идет об идентификации a_i и b_j , об учете обратных связей, выраженных некоторой функцией $F(y)$, а точнее

$$y(\vec{x}(t), \vec{z}(t)) = a_0 + \sum_i a_i x_i(t) + \sum_k b_k z_k(t) - F(y(\vec{x}(t), \vec{z}(t))) \quad (1)$$

и т. п. При этом молчаливо принимается предположение, что существует прямая связь между факторами и значением реакции, а единственный динамический элемент в модели – чистое запаздывание (например, в моделях вида $y(\vec{x}(t)) = a_0 + \sum_i a_i x_i(t - \Delta t)$).

Однако подобное предположение не всегда близко к реальности. Например, удобряя поле по определенным правилам, можно получить рост урожая (и дальнейшие экономические или социальные бонусы). То есть достоверно, из множества наблюдений, известно, что внесенное количество удобрений x_1 *ускоряет* рост урожая в каком-то диапазоне вноса удобрений:

$$\frac{\partial y(x, z, t)}{\partial t} \approx a_0 + a_1 x(t), \quad \forall t: 0 < x(t) \leq x_{\max}, \quad a_1 > 0,$$

а снижение количества осадков в определенных условиях *снижает* скорость роста:

$$\frac{\partial y(x, z(t), t)}{\partial t} \approx a_0 + b_1 z(t), \quad \forall t: z_{\min} \leq z(t) \leq z_{\max}, \quad b_1 > 0, \quad \forall t: z(t) < 0.$$

Для сложных систем, особенно учитывающих естественные процессы в природе, массовая идентификация коэффициентов связи между $y(t)$ и $x_i(t)$ без убедительного доказательства их взаимной независимости приводит к порождению «попугайских моделей» [4], адекватно интерполирующих прошлое, но не способных к прогнозу будущего – что, собственно, и требуется при построении моделей поддержки принятия решений.

К ним же относятся попытки экстраполировать $y(t)$ вперед по данным временных рядов (трендов), особенно с учетом ошибок или ненаблюдаемых внешних возмущений, что проиллюстрировано ниже.

Возникает вопрос – что же идентифицировать при построении динамической экономико-математической модели: связь между фактором и *реакцией* или связь между фактором и *динамикой изменения* реакции под воздействием этого фактора? В теории автоматического управления, как известно, фактор (или динамика его изменения) *линеаризуется*, а затем исследуется его влияние на *динамику* поведения объекта. Подобные подходы к экономико-математическим системам также разработаны очень давно. Например, в [5. С. 99] формулируется модель экологического равновесия

$$\frac{\partial y(x, y, t)}{\partial t} = y - y^2 - x(t)y, \quad 0 \leq x(t) < 1, \quad (2)$$

соответствующей по форме (1), от которой недалеко как до доходности (определяемой здесь квотой вылова $x(t)$), так и до катастроф в развитии популяции, что, собственно, и рассматривается далее в книге.

Таким образом, на уровне общенаучных рассуждений получается вывод, что в эколого-экономических моделях лучше использовать в качестве основы дифференциальные, а не алгебраические уравнения динамики системы.

Попробуем проверить вывод на нескольких примерах. Добавим в ур. (2) возмущающее воздействие – например, сезонное (периодическое) влияние погодных условий на воспроизведение популяции вида $z(t) = \sin(b_2 t)$ и получим

$$\frac{\partial y(x, y, t)}{\partial t} = y - y^2 - x(t)y - b_1 \sin(b_2 t).$$

Построим в MatLAB простую модель, положив рост квоты вылова в виде линейной зависимости $x(t) = a_0 + a_1 t$ (единица измерения времени – год). В [5] аналитически доказано, что при использовании варианта модели

$$\frac{\partial y(x, y, t)}{\partial t} = y - y^2 - x$$

система теряет устойчивость при $x \geq 0,25$ (в отсутствие обратной связи, связывающей вылов с текущим значением популяции). Проверим это, включив *Manual Switch* в нижнее положение, задав $Gain=0$ (рис. 1), чтобы исключить пока возмущающие воздействия, $a_1=0$ и задавая последовательно $a_0=0,22$, $a_0=0,25$ и $a_0=0,28$. При этом начальное

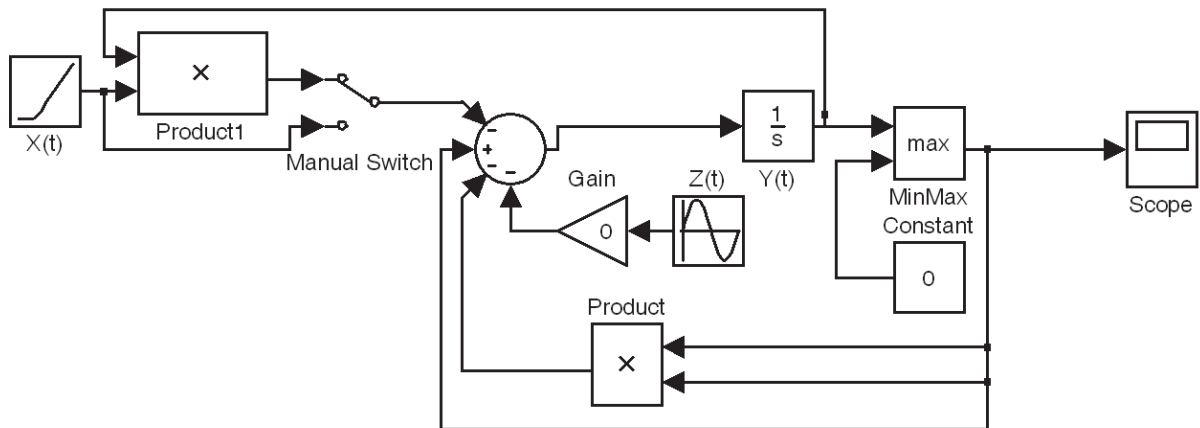


Рис. 1. MatLAB модель прогноза развития экологической системы

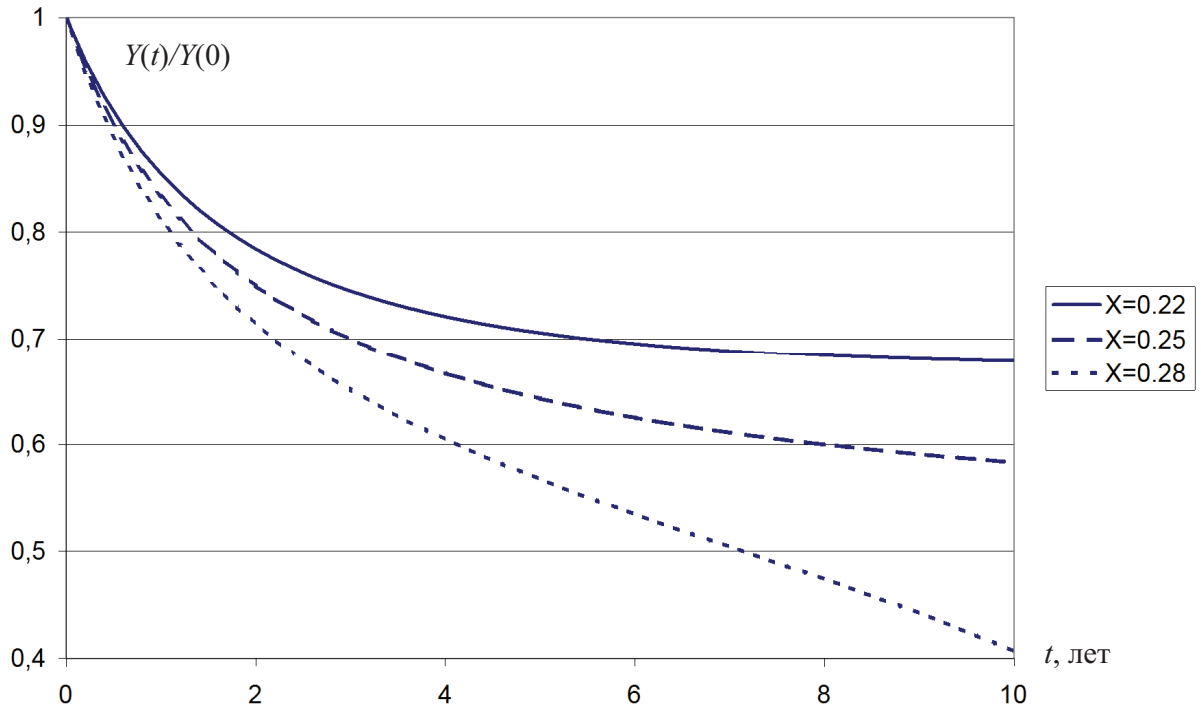


Рис. 2. Изменение по годам (ось абсцисс) динамики численности популяции (ось ординат) в зависимости от доли вылова X (ряды данных)

значение (*Initial Condition*) в блоке интегратора « $Y(t)$ » установим в 1 (полная популяция).

Блок *MinMax* в модели предназначен, чтобы не допускать падения популяции ниже 0 с последующим аварийным остановом расчетов.

Действительно, при превышении $x > 0,25$ наблюдается катастрофическое снижение популяции в конце десятилетнего периода (рис. 2).

Так как теоретический результат совпадает с расчетным, будем считать, что построенная модель адекватно отражает (2). Включим *Manual Switch* в верхнее положение (задавая, таким образом, долю от размера популяции) и установим *Gain* в произвольным образом выбранное значение 0,05; зададим $a_0 = 0,2$ и $a_1 = 0,025$, период изменения возмущения $z(t)$ установим равный 2π (один год). Получим зависимость популяции от времени, показанную на рис. 3 сплошной линией. Попробуем спрогнозировать развитие популяции по данным 1–6 годов, проведя регрессионный анализ. Используем для этого все доступные в *MS Excel* модели. Получим

уравнения динамики вида $y(t) = \sum_{i=0}^I a_i t^i$:

$$1. \quad y(t) = -0,045481t + 0,927281; \quad (3)$$

$$2. \quad y(t) = 0,008226t^2 - 0,093550t + 0,969766; \quad (4)$$

$$3. \quad y(t) = -0,002270t^3 + 0,028255t^2 - 0,138835t + 0,987380; \quad (5)$$

$$4. \quad y(t) = 0,000724t^4 - 0,010835t^3 + 0,060137t^2 - 0,177522t + 0,995103; \quad (6)$$

$$5. \quad y(t) = 0,930131e^{-0,055976t}. \quad (7)$$

Из рис. 3 очевидно, что экстраполяция в данном случае получается неудачной. Здесь и во всех следующих графиках по оси x отложено время в годах, по оси y – доля популяции от начального значения $y(0) = 1$.

Будем искать решение задачи в виде

$$y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i x(t)^i, \text{ полагая } x(t) = 0,2 + 0,025t \text{ известным (так как решение о доле вылова, принятое или планируемое лицом, принимающим решения, и должно быть известным). Для этого подготовим вспомогательную таблицу и произведем поиск решения наименьшего квадратичного отклонения}$$

$\bar{a} : \left(y^*(t) - \left(a_0 + \sum_{i=1}^m a_i x(t)^i \right) \right)^2$, где $y^*(t) : t \in \{t_i\}$ – полученные при помощи модели (рис. 1) «экспериментальные» значения, при $m = 1, 4$ на интервале времени с 1 по 6 года. «Спрогнозируем» развитие ситуации при принятом решении $x(t) = 0,2 + 0,025t$ на период с 7 по 10 год. Получим, вне зависимости от степени полинома, неудовлетворительные по качеству прогнозы (рис. 4).

Модели, по которым произведен расчет на рис. 3 и 4, получились вполне «попугайские» (по терминологии К.С. Лосева): они неплохо интерполируют исходные данные (на интервале до 6 года включительно), но качество экстраполяции оставляет желать лучшего.

Перейдем к моделированию воздействия факторов на динамику объекта. Подберем методом наименьших квадратов коэффициенты уравнений

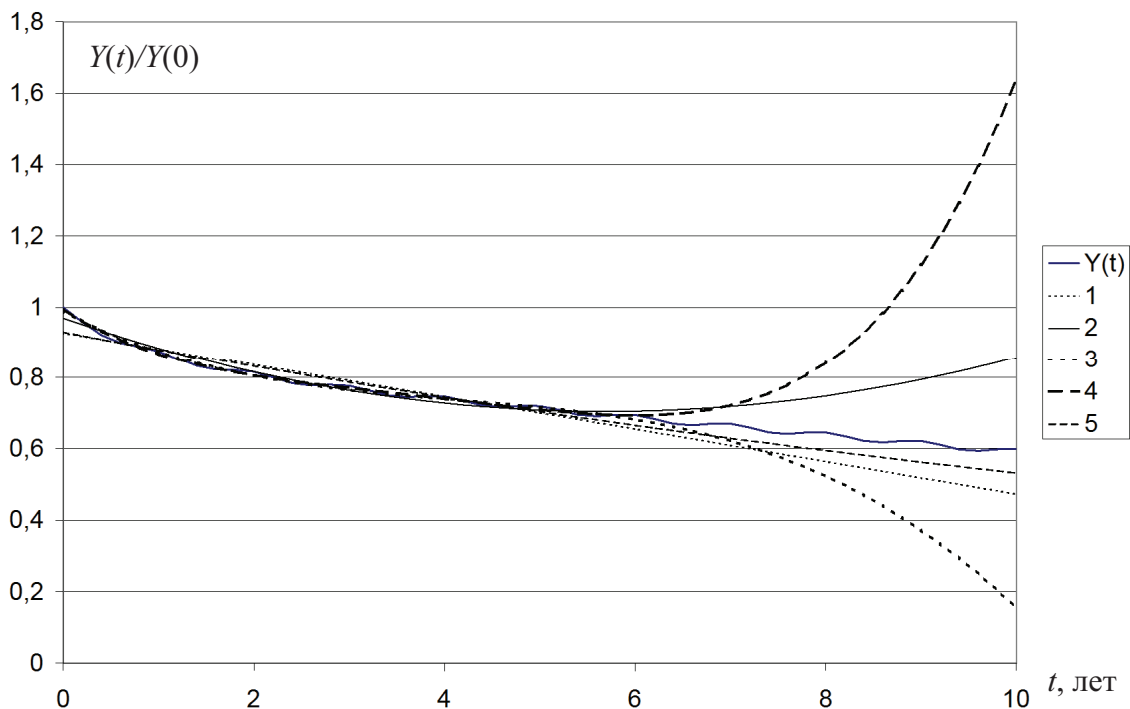


Рис. 3. Неудачные попытки экстраполяции численности популяции зависимостями $Y(t)$: исходные данные: 1) ур. (3); 2) ур. (4); 3) ур. (5); 4) ур. (6); 5) ур. (7)

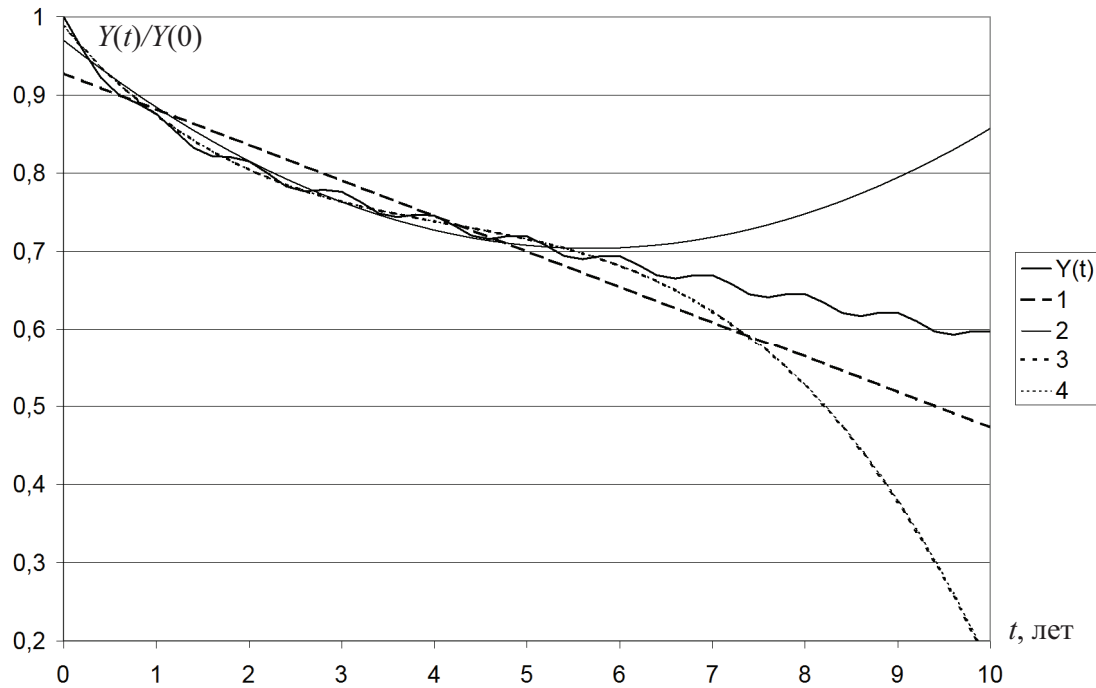


Рис. 4. Неудачные попытки экстраполяции численности популяции зависимостями: 1) $y(t)=1,291121-1,81922x(t)$; 2) $y(t)=2,245758-9,01517x(t)+13,17732x(t)^2$; 3) $y(t)=5,046407-40,798x(t)+131,2891x(t)^2-143,871x(t)^3$; 4) $y(t)=5,036115-40,6991x(t)+131,0587x(t)^2-144,083x(t)^3+0,87505x(t)^4$

$$\frac{dy(t)}{dt} = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i x(t)^i + \sum_{j=1}^n b_j y(t)^j =$$

$$= a_0 + \sum_{i=1}^m a_i (0,2 + 0,025t)^i + \sum_{j=1}^n b_j y(t)^j$$
 для $m=1,4$, $n=1,4$ и начального условия $y(0)=1$.
 Развернем уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= a_0 + a_1(0,2 + 0,025t) + b_1 y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= a_0 + a_1(0,2 + 0,025t) + \\ &\quad + a_2(0,2 + 0,025t)^2 + b_1 y(t) \\ &\quad \dots \\ \frac{dy(t)}{dt} &= a_0 + a_1(0,2 + 0,025t) + b_1 y(t) + b_2 y(t)^2 \\ \frac{dy(t)}{dt} &= a_0 + a_1(0,2 + 0,025t) + \\ &\quad + a_2(0,2 + 0,025t)^2 + b_1 y(t) + b_2 y(t)^2 \end{aligned}$$

и т. д.

Используем следующий набор подпрограмм.

1. Линейная одномерная интерполяция для вычисления $x(t): t \notin \{t_i\}$
2. Численное решение обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) методом Эйлера с небольшим шагом:

$$y(t + \Delta t) \approx y(t) + \Delta t \left(a_0 + \sum_{i=1}^m a_i x(t)^i + \sum_{j=1}^n b_j y(t)^j \right),$$

$$t \leq 10.$$

3. Вычисление суммы квадратов отклонений $S = \sum (y(t_i) - y^*(t_i))^2$, $t \neq 6$.
4. Оптимизация методом покоординатного спуска с переменным шагом $\Delta = \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}\}$, уменьшающимся каждый раз, когда при предыдущем значении шага получен локальный минимум.

В результате подбора коэффициентов a_0, a_i, b_j путем решения задачи $S \rightarrow \min$, получили следующий набор решений (рис. 5, табл. 1).

Таблица 1. Оценка качества экстраполяционных свойств моделей на основе ОДУ

m	n	Итераций	S	y(10)	$\frac{ y(10) - y^*(10) }{y^*(10)} \cdot 100$, в %
0	0	17	0,11249	0,33933	43,24
0	1	8441	0,0003887	0,69345	15,98
1	0	13917	0,0090426	1,09493	83,14
1	1	70654	0,0000426	0,65809	10,07
1	2	66418	0,0000426	0,65809	10,07
2	1	58456	0,000452	0,65880	10,18
2	2	53054	0,000452	0,65880	10,18

Данные решения позволяют сделать достаточно адекватный прогноз развития системы (рис. 5). Важно даже не то, что его относительная погрешность меньше, чем раньше, а именно *адекватность*: система развивается *примерно* так, как получено в результате моделирования, тогда как на рис. 3 и 4 многие экстраполяции *неадекватны*. Кроме того, в последнем случае существует простой и понятный критерий выбора прогноза S , а в двух предыдущих случаях выбрать порядок интер-

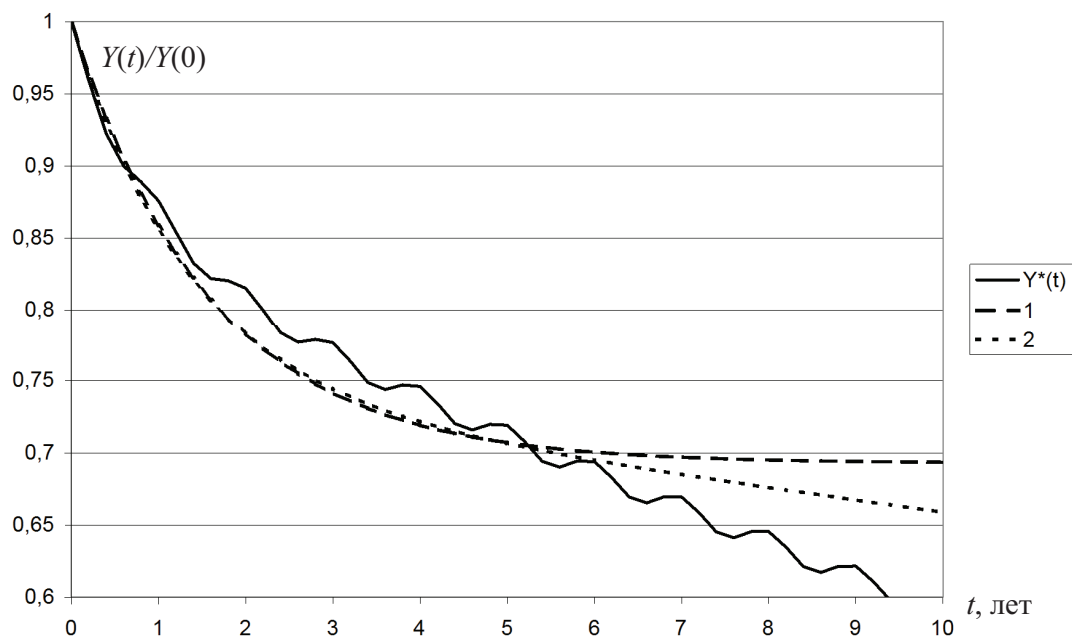


Рис. 5. Результаты экстраполяции на основе решения ОДУ без учета взаимного влияния состояния системы и управления: 1) $m=0$, $n=1$; 2) $m=1$, $n=1$

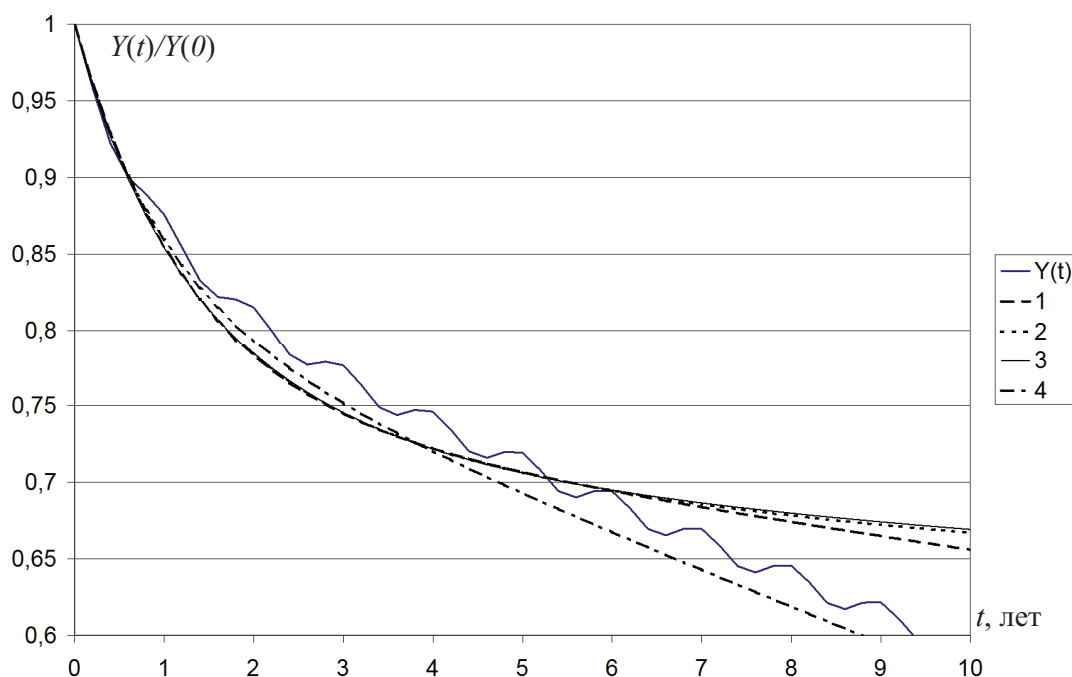


Рис. 6. Результаты экстраполяции на основе решения ОДУ с учетом взаимного влияния состояния системы и управления: 1) $n=1$, $m=1$; 2) $n=2$, $m=2$; 3) $n=1$, $m=2$; 4) точное решение

полирующего полинома, оценивая сумму квадратов отклонений, не удастся.

Рассмотрим модель, учитывающую взаимное влияние управления и состояния системы вида

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x(t)^i y(t)^j.$$

Внесем соответствующие изменения в программу. Так, блок решения ОДУ примет вид

```
for (double t=0; t<tk; t+=dt) // tk - ко-
нечное время, 0...10
{
    tmp=0;
    x=xt (t);
    for (i=0; i<=im; i++)
        for (j=0; j<=in; j++)
            tmp += ak [i][j]*ipow (x, i)*ipow (y, j);
    y += dt*tmp;
```

```
if (y<0) y=0;
},
```

где $ipow$ – функция возведения в целочисленную степень, xt – функция одномерной интерполяции.

Произведя численные эксперименты, получим результаты прогнозов на основании рассмотренных моделей (табл. 2).

Таблица 2. Оценка качества экстраполяционных свойств моделей на основе ОДУ с учетом взаимного влияния управления и состояния системы

m	n	S	$y(10)$	$\frac{ y(10) - y^*(10) }{y^*(10)} \cdot 100$, в %
0	0	0,11249	0,33933	43,24
1	1	0,0000369	0,65583	9,69
1	2	0,0000031	0,66706	11,57
2	2	0,0000131	0,66906	11,91

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дзюба С.А. Модели управления подсистемами предприятия в сфере среднего бизнеса и их инструментальное обеспечение: автореф. дис. ... д-ра экон. наук. – Иркутск, 2011. – 46 с.
2. Мицек Е.Б. Эконометрическое моделирование инвестиций в основной капитал экономики России: автореф. дис. ... д-ра экон. наук. – Екатеринбург, 2011. – 49 с.

Интересно, что программа не находит в качестве оптимального верное решение $a_{01}=1$, $a_{02}=a_{11}=-1$ при всех остальных $a_{ij}=0$. Квадратичная ошибка в этом случае $S=0,035783$, хотя погрешность прогноза $y(10)=0,57121$ составляет всего 4,46 %. Адекватность моделей сохраняется во всех случаях (рис. 6).

Заключение

Нельзя считать, что описанные неудачные попытки *доказывают* невозможность удачных аппроксимаций и экстраполяций временных трендов в эколого-экономическом моделировании с использованием традиционных и широко распространенных методов. Однако это хорошая иллюстрация того, что использование в качестве основы моделей обыкновенных дифференциальных уравнений может привести к качественному росту прогнозов и, следовательно, принимаемых решений.

3. Мирюлюбова А.А. Методология моделирования инвестиционного процесса в реальном секторе экономики региона: автореф. дис. ... д-ра экон. наук. – Иваново, 2012. – 33 с.
4. Лосев К.С. Мифы и заблуждения в экологии. – М.: Научный мир, 2010. – 224 с.
5. Арнольд В.А. Теория катастроф. – М.: Наука, 1990. – 128 с.

Поступила 26.03.2012 г.